ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 54, No. 3, 1986

RENORMAGES DE QUELQUES $\mathscr{C}(K)$

PAR
MICHEL TALAGRAND
Equipe d'Analyse — ERA 294, Université Paris 6,
Tour 46/0 — 4ème Et., 4, Place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT

Let $D([0,1])$ be the space of left continuous real valued functions on $[0,1]$ which have a right limit at each point. We show that $D([0,1])$ has no equivalent norm which is Gâteau differentiable. Hence the class of spaces which can be renormed by a Gâteau differentiable norm fails the three spaces property. We show that there is no norm on $\mathscr{C}([0,\Omega])$ such that its dual is strictly convex. However, there is an equivalent Fréchet differentiable norm on this space.

Soit E un espace de Banach. Une fonction convexe réelle φ sur E est dite Gâteau-différentiable si pour x, y dans E, la limite de $\lambda^{-1}(\varphi(x+\lambda y)-\varphi(x))$ existe pour $\lambda \to 0$. Une norme $\|\cdot\|$ sur E est dite Gâteau-différentiable si elle est Gâteau-différentiable sur $E\setminus\{0\}$. Ceci équivaut au fait que pour $x \in E\setminus\{0\}$, il existe un unique $y \in E'$ avec $y(x)=\|x\|$ et $\|y\|=1$ [1]. Il ne semble pas connu si la classe $\mathscr{G}$ des espaces de Banach qui admettent une norme équivalente Gâteau-différentiable possède la propriété des trois espaces, c'est à dire si $E \in \mathscr{G}$ dès que E possède un sous-espace F avec F, $E/F \in \mathscr{G}$. Nous allons montrer qu'il n'en est rien. L'exemple est l'espace $D = D([0,1])$ des fonctions réelles sur $[0,1]$ qui sont continues à gauche et qui ont une limite à droite. On note que $D/\mathscr{C}([0,1]) = c_0([0,1])$ et que $\mathscr{C}([0,1])$ et $c_0([0,1])$ sont dans $\mathscr{G}$.

On dit qu'une norme sur E est Fréchet différentiable si elle est différentiable au sens usuel en tout point de $E\setminus\{0\}$. Il est connu [1] qu'une norme est Fréchet différentiable si pour $x \in E\setminus\{0\}$, le diamètre de l'ensemble

$$\{y \in E', \|y\| \leqq 1, y(x) \geqq \|x\| - \varepsilon\}$$

tend vers zéro avec ε. En particulier, si la norme duale sur E' est strictement (resp. uniformément) convexe, la norme de E est Gâteau (resp. Fréchet)

Reçu le 17 juin 1985

différentiable. Il ne semble pas connu à ce jour d'exemple de norme différentiable dont la norme duale ne possède pas de bonnes propriétés de convexité. Nous allons construire une norme $N(\cdot)$ Fréchet différentiable sur $\mathscr{C}([0,\Omega])$, dont la norme duale n'est pas strictement convexe. En fait, il n'y a pas de norme sur $\mathscr{C}([0,\Omega])$ dont la norme duale soit strictement convexe. L'auteur remercie G. Godefroy d'avoir attiré son attention sur ces questions.

THÉORÈME 1. *Il n'existe pas de norme équivalente Gâteau-différentiable sur D. Plus précisément, si $N(\cdot)$ est une norme équivalente sur D, cette norme n'est pas Gâteau-différentiable en tout point de $\mathscr{C}([0,1])$.*

PREUVE. On désigne par $\|\cdot\|$ la norme sup sur D. Il est utile de considérer le compact K tel que $D=\mathscr{C}(K)$. Ce compact est l'"intervalle éclaté", c'est-à-dire $K=\{x\,;x\in[0,1]\}\cup\{x^+;x\in[0,1[\}$, une base de la topologie de K étant donnée par les intervalles du type $[x^+,y[$ et $]z,x]$. (La structure d'ordre est donnée par $x<x^+<y$ si $x<y$ dans $[0,1]$). On désigne par p la projection naturelle de K sur $[0,1]$, donnée par $p(\{x,x^+\})=x$.

Soit $a>1$ tel que $a^{-1}\|y\|\leqq N(y)\leqq a\|y\|$ pour $y\in D$. On suppose si possible que $N(\cdot)$ est Gâteau-differentiable en tout point de $\mathscr{C}([0,1])$. En particulier la restriction $M(\cdot)$ de $N(\cdot)$ à $\mathscr{C}([0,1])$ est Gâteau-différentiable. Pour $x\in[0,1]$, soit δ_x la mesure de Dirac en x. Le théorème de Bishop–Phelps montre qu'il existe une mesure υ'_x sur $[0,1]$, avec $\|\upsilon'_x\|\leqq a^{-2}/100$, telle que $\delta_x+\upsilon'_x$ atteigne sa norme. Il existe donc $a_x\in[a^{-1}/2,2a]$ et une mesure υ_x, avec $\|\upsilon_x\|\leqq a^{-1}/50$ et tels que $\mu_x=a_x\delta_x+\upsilon_x$ vérifie $M(\mu_x)=1$ et atteigne sa norme. On choisit une mesure λ_x sur K telle que $p(\lambda_x)=\mu_x$ et $N(\lambda_x)=1$. Ainsi λ_x atteint sa norme sur $\mathscr{C}([0,1])$.

On fixe une partie finie F de K, qui peut être vide, et qui est maximale pour la propriété que l'ensemble

$$C=\{x\in[0,1];\forall z\in F,\ a\delta_z/100\leqq|\lambda_x|\}$$

soit non dénombrable.

Il est clair que F existe, puisque $\|\lambda_x\|\leqq a$ pour tout x. Désignons par B la boule unité de l'espace des mesures sur $[0,1]$, pour la norme $M(\cdot)$, munie de la topologie préfaible. Soit

$$H=\{(x,a_x,\mu_x);x\in C\}\subset[0,1]\times[a^{-1}/2,2a]\times B=L.$$

On désigne par G l'ensemble des points de condensation de H, c'est à dire des points de H dont tout voisinage rencontre H en un ensemble non dénombrable. Puisque L a une base dénombrable d'ouverts, $H\backslash G$ est dénombrable, donc G

est non dénombrable. De plus un ouvert qui rencontre G le rencontre en un ensemble non dénombrable.

Soit:

$G^+ =$

$$\{x \in G; \exists \varepsilon_x > 0, \exists V_x \text{ voisinage de } (a_x, \mu_x) \text{ tel que } H \cap (]x, x+\varepsilon_x[\times V_x) = \varnothing\}.$$

Alors G^+ est dénombrable. En effet, dans le cas contraire, il existe $\varepsilon > 0$ et un ouvert V de $[a^{-1}/2, 2a] \times B$ tels que

$$G' = \{x \in G; (a_x, \mu_x) \in V, H \cap (]x, x+\varepsilon[\times V) = \varnothing\}$$

soit non dénombrable. Mais il existe alors $x_1, x_2 \in G'$ avec $x_2 \in]x_1, x_1 + \varepsilon[$, ce qui est absurde. De la même façon, on voit que l'ensemble

$$G^- = \{x \in G; \exists \varepsilon > 0, \exists V \text{ voisinage de } (a_x, \mu_x) \text{ tel que } H \cap (]x-\varepsilon, x[\times V) = \varnothing\}$$

est dénombrable. On peut donc choisir $x \in G \backslash (G^+ \cup G^-)$ et $x, x^+ \notin F$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout voisinage V de μ_x, les ensembles

$$H \cap (]x, x+\varepsilon[\times V); \qquad H \cap (]x-\varepsilon, x[\times V)$$

sont non vides, donc non dénombrables. Il résulte du choix de F qu'ils contiennent un point $y \in H$ avec

$$|\lambda_y(\{x\})| \leqq a, \qquad |\lambda_y(\{x^+\})| \leqq a.$$

On peut donc construire des suites $x_n < x$ et $y_n > x$ telles que

$$x_n \to x, \quad a_{x_n} \to a_x, \quad \mu_{x_n} \to \mu_x, \quad |\lambda_{x_n}(\{x\})| \leqq a, \quad |\lambda_{x_n}(\{x^+\})| \leqq a$$

et

$$y_n \to x, \quad a_{y_n} \to a_x, \quad \mu_{y_n} \to \mu_x, \quad |\lambda_{y_n}(\{x\})| \leqq a, \quad |\lambda_{y_n}(\{x^+\})| \leqq a.$$

Il existe une fonction continue f sur $[0,1]$ telle que $\mu_x(f) = 1$. Soient λ_1 et λ_2 des valeurs d'adhérence de (λ_{x_n}), et (λ_{y_n}) respectivement. On a $p(\lambda_1) = p(\lambda_2) = \mu_x$, donc $\lambda_1(f) = \lambda_2(f) = 1$. De plus $N(\lambda_1), N(\lambda_2) \leqq 1$. Pour conclure il suffit de montrer que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Soit $h = \chi_{[x^+,1]}$.

Soit

$$h_m \in \mathscr{C}([0,1]) \quad \text{avec} \quad \chi_{[x,1]} < h_m \leqq \chi_{[x-1/m,1]}.$$

Pour tout n on a

$$\lambda_{y_n}(h_m) = \mu_{y_n}(h_m) \geqq a_{y_n} - a^{-1}/10.$$

On a donc

$$\lambda_{y_n}(\chi_{[x,1]}) \geqq a_{y_n} - a^{-1}/10,$$

puis

$$\lambda_{y_n}(\chi_{[x^+,1]}) \geqq a_{y_n} - a^{-1}/5 \quad \text{et enfin} \quad \lambda_2(\chi_{[x^+,1]}) \geqq a_x - a^{-1}/5.$$

D'autre part, on a

$$\lambda_{x_n}(h_m) \leqq a_{x_n} h_m(x_n) + a^{-1}/10$$

d'où

$$\lambda_1(h_m) \leqq a^{-1}/10, \quad \text{puis} \quad \lambda_1(\chi_{[x,1]}) \leqq a^{-1}/10,$$

puis $\lambda_1(\chi_{[x^+,1]}) \leqq a^{-1}/5$, ce qui termine la preuve.

La structure de l'espace D n'est pas très bien comprise. Dans [2], on construit une fonction convexe φ sur D telle que l'ensemble des points de Gâteau-différentiabilité de φ soit maigre et dense. La réponse aux questions suivantes ne semble pas connue.

PROBLÈMES 2. (a) Est-ce que pour toute fonction φ convexe sur D et tout $\varepsilon > 0$, il existe un point a où l'ensemble $\{y \in D; \forall x \in D, \varphi(a+x) - \varphi(x) \geqq y(x)\}$ soit de diamètre $\leqq \varepsilon$?

(b) Est-ce que φ a un point de Gâteau différentiabilité?

Nous nous tournons maintenant vers l'étude de $\mathscr{C}([0,\Omega])$.

THÉORÈME 3. *Soit N une norme équivalente sur $\mathscr{C}([0,\Omega])$. Alors il existe $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots$ dans $[0,\Omega]$ et $b \in \mathbf{R}$ tels que pour toute famille finie $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de réels* positifs, *on ait $N(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\delta_{\alpha_i}) = b\sum_{i=1}^{\infty} a_i$. En particulier, la norme duale de N n'est pas strictement convexe.*

PREUVE. La fonction $\alpha \to N(\delta_\alpha)$ est s.c.i., et donc est égale à une constante b sur un ensemble fermé cofinal A de $[0,\Omega[$. Pour un $x \in A$, on note $x(1)$ son successeur dans A, puis $x(2) = x(1)(1)$, etc. Supposons que pour tout $x \in A$, il existe une famille finie $(a_i)_{i\leqq n}$ de rationnels positifs et $\varepsilon > 0$ tels que

$$N\Big(\sum_{i\leqq n} a_i\delta_{x(i)}\Big) \leqq b\sum_{i\leqq n} a_i - \varepsilon.$$

Il existe alors un $\varepsilon > 0$ et une famille finie $(a_i)_{i\leqq n}$ de rationnels positifs tels que l'ensemble

$$B = \Big\{x \in A\,; N\Big(\sum_{i\leqq n} a_i\delta_{x(i)}\Big) \leqq b\sum_{i\leqq n} a_i - \varepsilon\Big\}$$

soit non dénombrable. Il existe dans B une suite (x_l) telle que pour tout l, on ait $x_{l+1} \geqq x_l(n)$. Soit $x = \operatorname{Sup} x_l$. On a $x \in A$ puisque A est fermé, donc $N(x) = b$. Mais on a aussi

$$\left(\sum_{i \leq n} a_i\right)\delta_x = \lim_{l \to \infty} \sum_{i \leq n} a_i \delta_{x_l(i)}$$

au sens préfaible, et donc

$$b \sum_{i \leq n} a_i \leqq \limsup N\left(\sum_{i \leq n} a_i \delta_{x_l(i)}\right) \leqq b \sum_{i \leq n} a_i - \varepsilon$$

une contradiction.

THÉORÈME 4. *Pour tout ordinal τ, il existe sur $\mathscr{C} = \mathscr{C}([0,\tau])$ une norme équivalente Fréchet différentiable.*

PREUVE. *Première étape.* On peut supposer que la cofinalité de τ est égale à son cardinal. On désigne par $\mathscr{C}_0$ le sous-espace des fonctions nulles en τ. Il est de codimension 1, donc il suffit de construire la norme sur $\mathscr{C}_0$. Pour $\alpha \in [0,\tau[$, soit

$$\mu_\alpha = \frac{1}{10}(\delta_\alpha - \delta_{\alpha+1}).$$

On fixe une fonction $h : [0,1] \to [0,2]$ strictement concave et telle que $x \leqq h(x) \leqq 2x$. On considère l'ensemble B des éléments y du dual $M = M([0,\tau])$ de $\mathscr{C}$ qui admettent une écriture (non nécessairement unique) du type

$$y = \sum_{\alpha \leq \tau} a_\alpha \delta_\alpha + b_\alpha \mu_\alpha \tag{1}$$

de sorte qu'il existe une suite $(c_\alpha)_{\alpha \leq \tau}$ de réels, vérifiant

$$c_\alpha \geqq 0, \quad \sum_{\alpha \leq \tau} c_\alpha \leqq 1, \quad |a_\alpha| \leqq c_\alpha, \quad |b_\alpha| \leqq h(c_\alpha). \tag{2}$$

Deuxième étape. Nous allons montrer que B est la boule unité d'une norme duale sur M. Tout d'abord B est convexe équilibrée, et on a

$$\|y\| < 1 \Rightarrow y \in B \Rightarrow \|y\| < 7/5.$$

Le problème est de montrer que B est vaguement $(= \sigma(M, \mathscr{C}))$ fermée. On désigne par T l'ensemble des suites $((a_\alpha),(b_\alpha),(c_\alpha))$ qui vérifient (2), et pour $t \in T$ on désigne par $y(t)$ l'élément associé par (1). Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur T. On pose:

$$a^1_\alpha = \lim_{\mathscr{U}} a_\alpha, \quad b^1_\alpha = \lim_{\mathscr{U}} b_\alpha, \quad c^1_\alpha = \lim_{\mathscr{U}} c_\alpha,$$

pour $\alpha \leqq \tau$. Soit $s = \Sigma_\alpha c^1_\alpha$. On a bien sûr $s \leqq 1$. On a aussi $\Sigma |a^1_\alpha| \leqq 1$, $\Sigma |b^1_\alpha| \leqq 2$. Pour $t \in T$, soient

$$z^1(t) = \sum_{\alpha \leqq \tau} (a_\alpha - a^1_\alpha)\delta_\alpha\,; \qquad z^2(t) = \sum_{\alpha \leqq \tau} (b_\alpha - b^1_\alpha)\mu_\alpha.$$

Si F est un ensemble fini d'ordinaux, on a

$$\lim_{\mathcal{U}} \sum_{\alpha \notin F} |a_\alpha - a^1_\alpha| \leqq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{\alpha \notin F} c_\alpha \leqq 1 - \sum_{\alpha \in F} c^1_\alpha.$$

On a donc

$$\lim_{\mathcal{U}} \sum_{\alpha \leqq \tau} |a_\alpha - a^1_\alpha| \leqq 1 - s.$$

Il en résulte que $\lim_{\mathcal{U}} \|z^1(t)\| \leqq 1 - s$. La boule unité de M pour la topologie usuelle est vaguement compacte, donc $\lim_{\mathcal{U}} z'(t)$ est de la forme $z = \Sigma_{\alpha \leqq \tau} d_\alpha \delta_\alpha$, avec $\Sigma |d_\alpha| \leqq 1 - s$.

Soient $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \tau$, et $I =]\alpha_1, \alpha_2]$. Pour $\alpha \neq \alpha_2$ et $\alpha + 1 \neq \alpha_1$ on a $\mu_\alpha(\chi_I) = 0$. Il en résulte que $\lim_{\mathcal{U}} z^2(t)(\chi_I) = 0$, ce qui montre que $\lim_{\mathcal{U}} z^2(t) = 0$.

En résumé, on a montré que

$$\lim_{\mathcal{U}} y(t) = \sum_{\alpha < \tau} (a^1_\alpha + d_\alpha)\delta_\alpha + b^1_\alpha \mu_\alpha.$$

Posons

$$a'_\alpha = a^1_\alpha + d_\alpha, \quad c'_\alpha = |d_\alpha| + c^1_\alpha, \quad b'_\alpha = b^1_\alpha.$$

On a $|a^1_\alpha| \leqq c^1_\alpha$, d'où $|a'_\alpha| \leqq c'_\alpha$. On a

$$\sum_{\alpha \leqq \tau} c'_\alpha = \sum |d_\alpha| + 1 - s \leqq 1,$$

$$|b'_\alpha| = |b^1_\alpha| \leqq h(c^1_\alpha) \leqq h(c'_\alpha).$$

Ceci montre que $t' = ((a'_\alpha), (b'_\alpha), (c'_\alpha)) \in T$. Ainsi

$$\lim_{\mathcal{U}} y(t) = y(t') \in B.$$

Troisième étape. Ainsi nous avons montré qu'il existe une norme $N(\cdot)$ sur $\mathscr{C}$ telle que la boule unité de la norme duale soit B. Soit $x \in \mathscr{C}_0$, $x \neq 0$. Soit $y \in M$, avec $N(y) \leqq 1$ et $y(x) = \|x\|$. Puisque $y \in B$, on peut écrire y comme en (1).

On montre d'abord que si $c_\gamma \neq 0$, on a $x(\gamma) \neq 0$. En effet, supposons que pour un certain γ on ait $c_\gamma \neq 0$ et $x(\gamma) = 0$, et soit β tel que $x(\beta) = \|x\|$. Soit a'_α donné par $a'_\alpha = a_\alpha$ pour $\alpha \notin \{\beta, \gamma\}$, et par

$$a'_\gamma = 0, \qquad a'_\beta = a_\beta + c_\gamma \operatorname{signe} x(\beta).$$

Soit b'_α donné par $b'_\alpha = b_\alpha$ pour $\alpha \neq \gamma$ et par $b'_\gamma = 0$. On a

$$y' = \sum_{\alpha \leqq \tau} a'_\alpha \delta_\alpha + b'_\alpha \mu_\alpha \in B$$

mais

$$y'(x) \geqq y(x) + c_\gamma \|x\| - \frac{1}{10} c_\gamma \|x\| > y(x),$$

une contradiction. L'assertion est démontrée. Il est clair que de plus on a $a_\alpha = c_\alpha$ signe $x(\alpha)$ pour tout α.

On montre maintenant que si $c_\gamma \neq 0$, on a $\mu_\gamma(x) \neq 0$. Supposons en effet que pour un certain γ on ait $c_\gamma \neq 0$, $\mu_\gamma(x) = 0$. Par hypothèse, on a $x(\tau) = 0$, donc il existe un plus grand ordinal β tel que $|x(\beta)| = \|x\|$. Et on a $\mu_\beta(x) \neq 0$. Soit a'_α donné par $a'_\alpha = a_\alpha$ pour $\alpha \notin \{\beta, \gamma\}$, et par $a'_\gamma = 0$, $a'_\beta = a_\beta + c_\gamma$ signe $x(\beta)$. Soit b'_α donné par $b'_\alpha = b_\alpha$ pour $\alpha \notin \{\beta, \gamma\}$, et par $b'_\gamma = 0$, $b'_\beta = u$, où u est l'unique nombre tel que signe u = signe $\mu_\beta(x)$ et $h(|u|) = c_\gamma + c_\beta$. On voit que

$$y' = \sum a'_\alpha \delta_\alpha + b'_\alpha \mu_\alpha \in B.$$

De plus

$$y'(x) = y(x) + (u - b_\beta)\mu_\beta(x) + c_\gamma(\|x\| - x(\gamma)) > y(x),$$

une contradiction qui prouve l'assertion. Il est de plus clair que $b_\alpha = h(c_\alpha)$ signe $\mu_\alpha(x)$ pour chaque α.

Nous sommes maintenant en mesure de montrer que si $y' \in B$ satisfait $y'(x) = y(x)$, on a $y' = y$. Supposons qu'il existe α tel que $c_\alpha \neq c'_\alpha$. Puisque h est strictement concave, on a

$$u = h((c_\alpha + c'_\alpha)/2) - h((c_\alpha) + h(c'_\alpha))/2 > 0.$$

On vérifie que

$$z = (y + y')/2 + u\mu_\alpha \operatorname{signe} x(\alpha) \in B.$$

Puisque l'on a, soit $c_\alpha \neq 0$, soit $c'_\alpha \neq 0$, on a $x(\alpha) \neq 0$. Il en résulte que $z(x) > y(x) = y'(x)$, une contradiction. On a donc $c_\alpha = c'_\alpha$ pour tout α. Mais nous avons déjà vu que pour un élément $y \in B$ tel que $y(x) = N(y)$, les valeurs de c_α déterminent y.

Il reste à prouver que si (y_n) est une suite de B telle que $y_n(x) \to y(x)$, on a $\| y - y_n \| \to 0$. Puisque tout point d'adhérence vague z de (y_n) vérifie $z(x) = y(x)$, on a $z = y$, donc en fait (y_n) converge vaguement vers y. Ecrivons

$$y_n = \sum_{\alpha \leqq \tau} a_\alpha^n \delta_\alpha + b_\alpha^n \mu_\alpha$$

avec

$$|a_\alpha^n| \leqq c_\alpha^n, \quad |b_\alpha^n| \leqq h(c_\alpha^n), \quad c_\alpha^n \geqq 0, \quad \sum_{\alpha \leqq \tau} c_\alpha^n \leqq 1.$$

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre, et posons pour $\alpha \leqq \tau$

$$a'_\alpha = \lim_{\mathcal{U}} a_\alpha^n, \quad b'_\alpha = \lim_{\mathcal{U}} b_\alpha^n, \quad c'_\alpha = \lim_{\mathcal{U}} c_\alpha^n.$$

Puisque $y = \lim y_n$, la deuxième étape montre que

$$y = \sum_{\alpha \leqq \tau} (a'_\alpha + d_\alpha)\delta_\alpha + b'_\alpha \mu_\alpha$$

où $|b'_\alpha| \leqq h(c'_\alpha)$, $|a'_\alpha| \leqq c'_\alpha$, $\Sigma c''_\alpha \leqq 1$, où $c''_\alpha = c'_\alpha + |d_\alpha|$. Or, nous avons montré dans la précédente étape que si $c''_\alpha \neq 0$, on a $|b'_\alpha| = h(c''_\alpha)$. Ceci implique $h(c'_\alpha) = h(c''_\alpha)$, donc $c'_\alpha = c''_\alpha$. En particulier $\Sigma_\alpha c'_\alpha = 1$, d'où $|d_\alpha| = 0$ pour chaque α. Ainsi

$$y = \sum_{\alpha \leqq \tau} a'_\alpha \delta_\alpha + b'_\alpha \mu_x.$$

De plus, pour chaque n, $\Sigma_\alpha |a_\alpha^n| \leqq 1$. Aussi,

$$\limsup_n \sum_\alpha |b_\alpha^n| \leqq \limsup_n \sum_\alpha h(c_\alpha^n) \leqq \sum_\alpha h(c'_\alpha) = \sum_\alpha |b'_\alpha|.$$

Il en résulte sans peine que $\| y_n - y \| \to 0$.

Références

1. J. Diestel, *Geometry of Banach Spaces, Selected Topics*, Lecture Notes in Math. **485**, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

2. M. Talagrand, *Deux exemples de fonctions convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 461–464.